

На правах рукописи

КАРПЕНКО ЛАРИСА ВЛАДИМИРОВНА

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ
СТОХАСТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ ПОПУЛЯЦИЙ**

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Екатеринбург – 2013

Работа выполнена на кафедре математической физики федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования "Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина"

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Ряшко Лев Борисович

Официальные оппоненты: Соловьева Ольга Эдуардовна, доктор
физико-математических наук, доцент,
ФГБУН Институт иммунологии и
физиологии УрО РАН, заведующая
лабораторией математической физиологии

Тимофеева Галина Адольфовна, доктор
физико-математических наук, профессор,
ФГБОУ ВПО "Уральский государственный
университет путей сообщения", заведующая
кафедрой высшей и прикладной математики

Ведущая организация: ФГБОУ ВПО "Челябинский
государственный университет"

Защита состоится " ____ " _____ 2013 года в _____ часов на заседании диссертационного совета Д 212.285.25 на базе ФГАОУ ВПО "Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина" по адресу: 620000, Екатеринбург, проспект Ленина, 51, комн. 248.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГАОУ ВПО "Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина"

Автореферат разослан " ____ " _____ 2013г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физико-математических наук, профессор

Пименов В.Г.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы

Настоящая диссертация посвящена моделированию и анализу устойчивости предельных множеств нелинейных динамических систем, находящихся под воздействием стохастических возмущений. Объектом исследования являются модели биологических сообществ, взаимодействующих по принципу "хищник-жертва".

Исследование математических моделей, описывающих взаимодействие популяций, впервые было начато в первой половине XX века с выходом основополагающих работ А. Лотки (1925) и В. Вольтерры (1926), где впервые была сформулирована простая аналитическая модель, демонстрирующая возникновение незатухающих колебаний благодаря лишь внутренним свойствам системы. Эти работы вызвали значительный отклик в работах многих исследователей (Allee W.C., Bulmer M.G, Elton C., Gilpin M.E., MacArthur R.H., May R.M., Nicholson M.). Большую роль в развитие математической теории популяционной динамики внесла работа Колмогорова А.Н. (1936, 1972). В ней был предложен новый подход к описанию популяционных моделей, вводящий ограничения качественного характера на функции системы. Исчерпывающий теоретический анализ, систематизация и классификация популяционных моделей были проведены в известной работе Базыкина А.Д. "Математическая биофизика взаимодействующих популяций" (1985). Исследования в области моделирования в популяционной динамике продолжаются и в настоящее время в работах Апониной Е.А, Березовской Ф.С., Морозова А.Ю., Allen L.J.S., Brauer F., Malchow H., Mobilia M., Tauber U.C.

Начиная с работ Лотки и Вольтерры, и до настоящего времени, основным инструментом изучения динамики численности взаимосвязанных сообществ является качественная теория систем нелинейных дифференциальных уравнений. Исследования последних лет показали, что разнообразие, наблюдаемое в поведении двумерных нелинейных динамических систем можно свести к анализу относительно простых режимов (равновесия, циклы) и их качественных преобразований – бифуркаций (Гукенхеймер Д., Холмс Ф., Анищенко В.С.).

В трехмерных моделях кроме регулярных аттракторов – равновесий и предельных циклов, могут возникать странные аттракторы – хаотические режимы. Один из стандартных сценариев перехода системы от порядка к хаосу по мере изменения управляющих параметров состоит в бесконечной последовательности бифуркаций удвоения периода предельных циклов. В 1978г. М. Фейгенбаумом были открыты универсальные закономерности перехода к хаосу посредством такой серии бифуркаций. Наиболее известными моде-

лями, демонстрирующими возникновение странного аттрактора, являются модели Лоренца, Ресслера, Чуа. В трехмерных популяционных моделях хаотические режимы исследовались в работах Апонина Ю.М., Петровского С.В., Arneodo A., Xiao D.

Функционирование реальных биологических систем, как правило, сопровождается воздействием трудно контролируемых внешних возмущений. Под их влиянием, решение системы покидает детерминированный аттрактор и формирует вокруг него некоторое облако случайных состояний. Первые результаты, касающиеся выхода из области устойчивости стохастически возмущенного решения системы, были опубликованы еще в работе Arrhenius S.A. в 1899 году. В классической работе Понтрягина Л.С., Андропова А.А., Витта А.А. "О статистическом рассмотрении динамических систем" (1933) были сформулированы основные задачи стохастической динамики, которые остаются актуальными и сейчас.

Если плотность распределения случайных состояний в облаке стремится к некоторой стационарной, то соответствующее решение стохастической системы называется *стохастическим аттрактором*. Конструкция стохастических аттракторов изучалась у Арнольда Л., Бланка М.Л., Scheutzow M., Schenk-Norpe K.R.

Исследование нелинейных систем в присутствии случайных возмущений было начато Понтрягиным Л.С. и продолжено Стратоновичем Р.Л., Анищенко В.С. и многими другими исследователями. Фазовый портрет системы под воздействием случайных возмущений может претерпевать значительные изменения. Соответствующие деформации, вызванные шумами, особенно ощутимы вблизи точек бифуркаций, где даже малые шумы, вследствие высокой чувствительности аттракторов, могут порождать новые явления в динамике системы, что показано в работах Башкирцевой И.А., Ряшко Л.Б., Sieber M., Malchow H., Tateno T.

Полное вероятностное описание возможных в системе стохастических режимов дается с помощью функции плотности распределения, удовлетворяющей уравнению Фоккера-Планка-Колмогорова, но непосредственное использование этого уравнения уже для систем двух взаимодействующих популяций весьма затруднительно. Для систем с малыми случайными возмущениями в работе Вентцеля А.Д. и Фрейдлина М.И. предложен метод, использующий конструкцию *квазипотенциала*. Вблизи аттрактора детерминированной системы для квазипотенциала может быть найдена квадратичная аппроксимация, позволяющая в итоге получить асимптотику стационарной плотности в форме нормального распределения.

В исследованиях Башкирцевой И.А. и Ряшко Л.Б. (1998-2001) была разра-

ботана методика, позволяющая описать разброс случайных траекторий стохастической системы вокруг детерминированного аттрактора с помощью специальной *функции стохастической чувствительности* (ФСЧ), базирующейся на аппроксимации квазипотенциала. При помощи ФСЧ в работах Стихина П.В., Губкина А.А., Цветкова И.Н., Переваловой Т.В. исследована чувствительность аттракторов и проведен анализ обратных стохастических бифуркаций для ряда динамических систем, в том числе и дискретных.

Целью работы является разработка и апробация методов исследования чувствительности стохастических аттракторов нелинейных систем популяционной динамики, ее визуализации в форме доверительных областей и сопоставление результатов анализа стохастической чувствительности и детерминированной устойчивости аттракторов. Особый интерес представляет исследование характеристик устойчивости предельных циклов в цепочке бифуркаций удвоения периода при переходе от порядка к хаосу.

Методы исследования, использованные в настоящей работе, опираются на численное моделирование детерминированных и стохастических траекторий динамических систем, теорию стохастической устойчивости и аппарат функции стохастической чувствительности.

Научная новизна. В работе получены и выносятся на защиту следующие результаты:

1. Разработана техника математического моделирования стохастических аттракторов двумерных систем в форме доверительных областей. Для предельных циклов трехмерных систем обоснована сходимости метода отыскания матрицы стохастической чувствительности.
2. Выявлены и наглядно продемонстрированы различия в отклике системы "хищник-жертва" на воздействие аддитивных и параметрических шумов. Для трехмерных систем "продуцент-консумент-хищник" и "хищник-две жертвы" установлено соответствие между детерминированными и стохастическими характеристиками устойчивости предельных циклов.
3. Определены интервалы структурной устойчивости в цепи бифуркаций удвоения периода цикла системы "хищник-две жертвы". На каждом интервале выявлены наименее чувствительные циклы. Установлена универсальность роста чувствительности в цепи бифуркаций для разных типов шума.
4. Разработан программный комплекс, реализующий алгоритмы решения рассмотренных в диссертации задач математического моделирования и анализа аттракторов двух- и трехмерных динамических систем.

Достоверность результатов обеспечивается:

1. строгостью постановок и доказательств утверждений;
2. подтверждением аналитических результатов результатами численного моделирования.

Теоретическая и практическая ценность работы

Теоретическую ценность работы представляют предложенные методики математического моделирования, анализа и визуализации стохастических аттракторов на основе техники ФСЧ. Практическая ценность состоит в применении разработанных методов к моделям популяционной динамики, выявлении закономерностей изменения чувствительности при воздействии стохастических шумов различной природы, в сопоставлении результатов детерминированного и стохастического анализа аттракторов. Также практическую ценность имеет разработанный программный комплекс.

Личный вклад. Основные результаты, вынесенные на защиту, являются новыми и получены автором лично. Автором проведены все теоретические и эмпирические исследования, получены и систематизированы результаты.

Апробация работы. Основные положения и результаты диссертации докладывались и обсуждались на 38-й, 39-й, 40-й, 41-й, 42-й и 43-й Всероссийских молодежных конференциях "Проблемы теоретической и прикладной математики" (Екатеринбург, 2007-2012), на межвузовской конференции по проблемам информатики СПИСОК-2009 (Екатеринбург, 2009) и конференции, посвященной 50-летию кафедры вычислительной математики и математико-механического факультета УрГУ (Екатеринбург, 2010).

Публикации. Всего по теме диссертации опубликовано 11 работ, из них 3 статьи в рецензируемых научных журналах, входящих в список ВАК [1-3], и 8 публикаций в сборниках и трудах конференций [4-11].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав основного содержания, заключения, списка цитируемой литературы и приложения. Работа занимает 134 машинописные страницы, содержит 52 рисунка, 8 таблиц и 131 ссылку на литературные источники.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении кратко обоснована актуальность работы, сформулированы ее цели, указаны научная новизна, практическое значение и апробация проведенных исследований.

Первая глава носит теоретический характер. В ней излагаются методы анализа устойчивости и стохастической чувствительности равновесий и предельных циклов.

Рассматривается в общем виде детерминированная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \quad (1)$$

где $f(x)$ – достаточно гладкая n -мерная вектор-функция.

Предполагается, что система (1) имеет экспоненциально устойчивый аттрактор – равновесие \bar{x} либо предельный цикл Γ , задаваемый T -периодическим решением $\xi(t)$.

В параграфе 1.1 излагаются основы классического анализа локальной устойчивости аттракторов по линейной системе первого приближения. Описываются методики исследования устойчивости при помощи характеристических показателей Ляпунова λ_i и мультипликаторов ρ_i ($i = 1, \dots, n$). В качестве *показателя детерминированной устойчивости* цикла используется величина $r = \max_i |\rho_i|$ ($i = 1, \dots, n-1, \rho_n \equiv 1$).

В параграфе 1.2 для анализа результатов воздействия случайных возмущений на детерминированную систему (1), рассматривается соответствующая стохастическая система Ито:

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon \sigma(x) \dot{w}, \quad (2)$$

где $\sigma(x)$ – достаточно гладкая $n \times m$ -матричная функция, задающая зависимость случайных возмущений от состояния системы, $w(t)$ – m -мерный стандартный винеровский процесс, ε – скалярный параметр, характеризующий интенсивность возмущений.

Под воздействием невырожденных шумов случайные траектории системы (2) образуют вокруг детерминированного аттрактора системы (1) стационарно распределенный пучок случайных состояний – *стохастический аттрактор*. Детальное описание плотности $p(x, \varepsilon)$ стационарного распределения состояний стохастического аттрактора дается стационарным уравнением Фоккера-Планка-Колмогорова

$$\frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (a_{ij} p) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (f_i p) = 0, \quad a_{ij} = [\sigma \sigma^\top]_{ij}. \quad (3)$$

Поскольку непосредственное использование этого уравнения может быть весьма затруднительным, для вероятностного описания разброса случайных состояний в системах с малыми стохастическими возмущениями рассматривается подход, использующий некоторую специально конструируемую функцию – *квазипотенциал* [Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И.]

$$v(x) = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \ln p(x, \varepsilon),$$

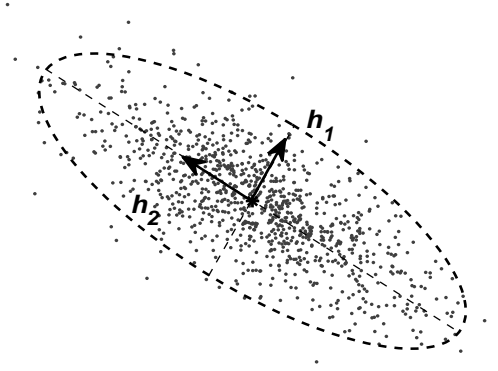


Рис. 1: Доверительный эллипс для стохастического равновесия.

с помощью которого можно записать асимптотику стационарной плотности распределения

$$p(x, \varepsilon) \approx K \cdot \exp \left(-\frac{v(x)}{\varepsilon^2} \right).$$

В пункте 1.2.1 для стохастически возмущенного равновесия \bar{x} используется асимптотика стационарной плотности $p(x, \varepsilon)$ в форме нормального распределения

$$p(x, \varepsilon) \approx K \cdot \exp \left(-\frac{(x - \bar{x}, W^{-1}(x - \bar{x}))}{2\varepsilon^2} \right)$$

с ковариационной матрицей $D(\varepsilon) = \varepsilon^2 W$. Матрица W играет роль матричного коэффициента стохастической чувствительности равновесия \bar{x} .

Матрица W , в случае экспоненциально устойчивого равновесия \bar{x} , является [Мильштейн Г.Н., Ряшко Л.Б.] единственным решением уравнения

$$FW + WF^\top = -S, \quad (4)$$

где

$$F = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}), \quad S = GG^\top, \quad G = \sigma(\bar{x}).$$

Собственные значения $\eta_1 \geq \eta_2 \geq \dots \geq \eta_n \geq 0$ матрицы W характеризуют величину разброса случайных состояний в направлении соответствующих собственных векторов h_1, h_2, \dots, h_n . В качестве общей характеристики чувствительности равновесия предлагается использовать величину $m = \max_i \eta_i = \eta_1$ — *показатель стохастической чувствительности*.

Удобной геометрической моделью стохастического равновесия является *эллипс рассеивания*. В двумерном случае доверительный эллипс (рис. 1) задается уравнением

$$\frac{\nu_1^2}{\eta_1} + \frac{\nu_2^2}{\eta_2} = 2k^2\varepsilon^2,$$

где $\nu_i = (x - \bar{x}, h_i)$, $k^2 = -\ln(1 - \mathcal{P})$, \mathcal{P} – заданная доверительная вероятность.

В пункте 1.2.2 описывается построение ФСЧ для стохастически возмущенного цикла Γ . Рассматривается семейство секущих гиперплоскостей Π_t , ортогональных циклу в точках $\xi(t)$ ($t \in [0; T)$), и вектор-функция X_t , значения которой есть точки пересечения случайных траекторий системы (2) с гиперплоскостями Π_t . Вероятностное распределение траекторий в пучке с течением времени стабилизируется, поэтому случайная переменная X_t имеет некоторое стационарное распределение с плотностью $\rho_t(x, \varepsilon)$.

С помощью соответствующей квадратичной аппроксимации квазипотенциала вблизи цикла для плотности распределения можно записать экспоненциальную гауссовскую асимптотику [Башкирцева И.А., Ряшко Л.Б.]

$$\rho_t(x, \varepsilon) = K \cdot \exp \left(-\frac{(x - \xi(t))^T W^+(t)(x - \xi(t))}{2\varepsilon^2} \right)$$

со средним значением $m_t = \xi(t)$ и ковариационной матрицей $D(t, \varepsilon) = \varepsilon^2 W(t)$, задающей вблизи $\xi(t)$ разброс точек пересечения случайных траекторий с гиперплоскостью Π_t . Здесь $+$ есть знак псевдообращения.

В силу вырожденности матрицы чувствительности $W(t)$, младшее ее собственное значение $\eta_n(t) \equiv 0$. Остальные собственные значения $\eta_1(t) \geq \eta_2(t) \geq \dots \geq \eta_{n-1}(t) \geq 0$ и соответствующие им собственные векторы $h_1(t), h_2(t), \dots, h_{n-1}(t)$ характеризуют разброс пучка в гиперплоскости Π_t по величине и направлению.

Матрица $W(t)$ для экспоненциально устойчивого цикла является единственным решением уравнения [Ряшко Л.Б.]

$$\dot{W} = F(t)W + WF^T(t) + P(t)S(t)P(t), \quad (5)$$

с условиями

$$W(t)r(t) = 0, \quad (6)$$

$$W(t+T) = W(t). \quad (7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t)), \quad S(t) = G(t)G^T(t), \quad G(t) = \sigma(\xi(t)), \\ P(t) &= P_{r(t)}, \quad r(t) = f(\xi(t)), \quad P_r = I - \frac{rr^T}{r^T r}, \end{aligned} \quad (8)$$

P_r – матрица проектирования на подпространство, ортогональное вектору $r \neq 0$.

Для цикла на плоскости ($n = 2$), матрица $W(t)$ и проекционная матрица $P(t)$ представимы в виде

$$W(t) = \mu(t)P(t), \quad P(t) = p(t)p^T(t),$$

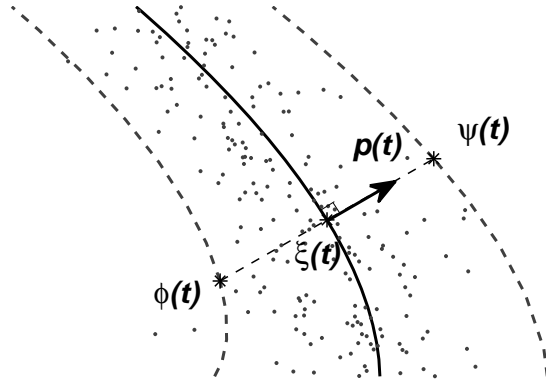


Рис. 2: Доверительное кольцо для предельного цикла.

где $p(t)$ – нормированный вектор, ортогональный циклу Γ в точке $\xi(t)$. Функция $\mu(t) > 0$ – T -периодическая скалярная функция, задающая разброс пучка по нормали $p(t)$ к циклу. Она называется *функцией стохастической чувствительности* двумерного предельного цикла.

Функция $\mu(t)$ является решением краевой задачи [Башкирцева И.А., Ряшко Л.Б.]

$$\dot{\mu} = a(t)\mu + b(t), \quad \mu(0) = \mu(T)$$

с T -периодическими коэффициентами

$$a(t) = p^\top(t)(F^\top(t) + F(t))p(t), \quad b(t) = p^\top(t)S(t)p(t),$$

и может быть найдена в явном виде

$$\mu(t) = g(t)(c + h(t)),$$

где

$$g(t) = \exp \left(\int_0^t a(s) ds \right), \quad h(t) = \int_0^t \frac{b(s)}{g(s)} ds, \quad c = \frac{g(T)h(T)}{1 - g(T)}.$$

Величину $m = \max_{[0;T]} \mu(t)$ – *показатель стохастической чувствительности цикла* – предлагается использовать как удобную характеристику чувствительности цикла в целом.

Наглядной геометрической моделью стохастического цикла служит доверительное *кольцо рассеивания* (рис. 2). В диссертации дается построение доверительного кольца для двумерного предельного цикла при помощи функции $\mu(t)$. Точки внутренней и внешней границ доверительного кольца определяются соответственно как

$$\phi(t) = \xi(t) - v(t), \quad \psi(t) = \xi(t) + v(t),$$

где $v(t) = k \varepsilon p(t) \sqrt{2\mu(t)}$, $k^2 = \text{erf}^{-1}(\mathcal{P})$, \mathcal{P} – заданная доверительная вероятность, $\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$.

Для предельного цикла размерности $n = 3$ выразить функцию стохастической чувствительности явной формулой не удастся, поэтому следует решать краевую задачу (5) для матричной функции $W(t)$ при помощи численного метода установления.

Матрица $W(t)$ связывается с системой первого приближения

$$\dot{z} = F(t)z + \varepsilon G(t)\dot{w}. \quad (9)$$

для отклонения $z(t) = x(t) - \xi(t)$ решений $x(t)$ стохастической системы (2) от $\xi(t)$.

Для функции $u(t) = \frac{z(t)}{\varepsilon}$ справедлива система

$$\dot{u} = F(t)u + G(t)\dot{w}. \quad (10)$$

Наряду с (10) рассматривается стохастическая система

$$\dot{y} = F(t)y + P(t)G(t)\dot{w}, \quad (11)$$

случайные возмущения в которой являются проекциями возмущений системы (10). Матрицы параметров $F(t)$, $G(t)$ и $P(t)$ определены в (8).

Лемма 1 [2]. Пусть цикл, задаваемый решением $x = \xi(t)$ системы (2), экспоненциально устойчив. Тогда у системы (11) существует решение $\bar{y}(t)$ с ковариационной матрицей $\text{cov}(\bar{y}(t), \bar{y}(t)) = W(t)$, где $W(t)$ – решение системы (5)-(7).

Для всякого решения $z(t)$ системы (9), проекция $P(t)z(t)$ сходится в среднем квадратичном к $\varepsilon \bar{y}(t)$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} E \|P(t)z(t) - \varepsilon \bar{y}(t)\|^2 = 0,$$

где $\bar{y}(t)$ – частное решение системы (11) с начальным условием $\bar{y}(0) = y_0$. Ковариационная матрица $\text{cov}(P(t)z(t), P(t)z(t))$ проекций $P(t)z(t)$ сходится к $\varepsilon^2 W(t)$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (\text{cov}(P(t)z(t), P(t)z(t)) - \varepsilon^2 W(t)) = 0.$$

Для отыскания матрицы $W(t)$ используется метод установления [Башкирцева И.А., Ряшко Л.Б.]. Рассматривается решение $V(t)$ задачи Коши

$$\dot{V} = F(t)V + VF^\top(t) + P(t)S(t)P(t), \quad V(0) = V_0. \quad (12)$$

В [2] доказан следующий результат:

Теорема. Сходимость метода установления. Пусть $W(t)$ – решение краевой задачи (5)-(7), $V(t)$ – решение задачи Коши (12), $P(t)$ – проекционная матрица из (8). Матрица $P(t)V(t)P(t)$, независимо от выбора начальной неотрицательно определенной матрицы V_0 , сходится к $W(t)$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (P(t)V(t)P(t) - W(t)) = 0. \quad (13)$$

Скорость сходимости метода установления определяется величиной показателя детерминированной устойчивости: при его уменьшении скорость сходимости увеличивается, а при стремлении к единице – резко падает.

Лемма 2. Краевая задача (5), (7) без условия (6) имеет бесконечное множество решений:

$$V(t) = W(t) + q r(t) r^\top(t),$$

где $q \neq 0$ – произвольное число.

Для отыскания приближенных значений $V_i \approx V(t_i)$ ($t_i = ih$) решения $V(t)$ задачи (12) предлагается взять за основу один из стандартных одношаговых численных методов с некоторым шагом h :

$$V_{i+1} = \mathcal{F}_i(V_i, h). \quad (14)$$

При непосредственном использовании схемы (14) накапливающаяся погрешность, вследствие нарушения (6), ведет к расходимости процесса. Поэтому расчет следует вести по формуле с применением "чистки" приближения проектором $P_{i+1} = P(t_{i+1})$, в соответствии с приведенным выше методом установления:

$$V_{i+1} = P_{i+1} \mathcal{F}_i(V_i, h) P_{i+1}. \quad (15)$$

Однако непосредственное вычисление матриц V_i имеет высокую вычислительную сложность и может потребовать значительных временных затрат для достижения необходимой точности. Вместо этого для систем размерности $n = 3$ можно использовать сингулярное разложение для вычисления компонент ФСЧ.

Функция стохастической чувствительности для трехмерного цикла в каждый момент времени t выражается двумя собственными числами $\eta_1(t) \geq \eta_2(t)$ матрицы $W(t)$. Сингулярное разложение матрицы $W(t)$ имеет вид:

$$W(t) = \eta_1(t) h_1(t) h_1^\top(t) + \eta_2(t) h_2(t) h_2^\top(t). \quad (16)$$

Для невырожденных шумов функции $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$ и ортонормированные собственные векторы $h_1(t)$ и $h_2(t)$ задают параметры эллипса рассеивания

случайных состояний в плоскости Π_t . Пусть векторы $u_1(t)$, $u_2(t)$ образуют ортонормальный базис плоскости Π_t , который легко находится, если известно решение $\xi(t)$. Векторы $h_1(t)$ и $h_2(t)$ могут быть получены поворотом базиса $u_1(t)$, $u_2(t)$ на некоторый угол $\varphi(t)$. Это позволяет нам выразить неизвестное решение системы (5) через значения трех скалярных функций $\eta_1(t)$, $\eta_2(t)$ и $\varphi(t)$, которые удовлетворяют системе уравнений [Башкирцева И.А., Ряшко Л.Б.]

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_1 &= \eta_1 h_1^\top (F + F^\top) h_1 + h_1^\top S h_1 \\ \dot{\eta}_2 &= \eta_2 h_2^\top (F + F^\top) h_2 + h_2^\top S h_2 \\ (\eta_1 - \eta_2) \dot{\varphi} &= \eta_2 h_1^\top F h_2 + \eta_1 h_1^\top F^\top h_2 + h_1^\top S h_2 - (\eta_1 - \eta_2) \dot{u}_1^\top u_2.\end{aligned}\tag{17}$$

В невырожденном случае, когда $\eta_1 - \eta_2 \neq 0$, система (17) позволяет однозначно находить параметры $\eta_1(t)$, $\eta_2(t)$ и $\varphi(t)$.

В случае, когда собственные числа η_1 и η_2 близки друг к другу, система (17) имеет особенность, так как в случае кратных собственных значений задача отыскания собственных векторов является некорректной. В этом случае матрица $W(t)$ имеет простое представление: $W(t) = \eta_1(t)P(t)$, и отыскание собственных векторов при этом не требуется. Поэтому на интервалах, где $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$ равны или близки друг к другу, предлагается [2] перейти от системы (17) к системе (5).

Для трехмерного случая также вводится показатель стохастической чувствительности $m = \max_{[0;T)} \eta_1(t)$.

Таким образом, в первой главе рассмотрены и обоснованы два метода для построения ФСЧ циклов. Первый – общий метод установления – может применяться для анализа стохастических циклов произвольных n -мерных систем. Вторым, использующий сингулярное разложение, ориентирован на исследование циклов трехмерных систем.

Разработанные и описанные в главе 1 методы моделирования и анализа стохастических равновесий и циклов используются в главах 2, 3 и 4 для исследования двух- и трехмерных популяционных моделей, имеющих различные типы динамики.

В главе 2 на основе техники ФСЧ производится анализ стохастических аттракторов двумерной популяционной модели "хищник-жертва"

$$\begin{cases} \dot{x} = x - a \frac{x}{1+x} y - \gamma x^2, \\ \dot{y} = -y + b \frac{x}{1+x} y, \end{cases}\tag{18}$$

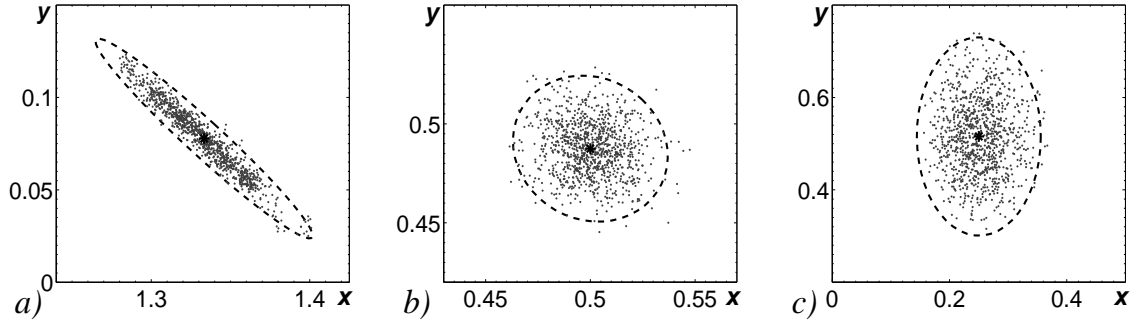


Рис. 3: Стохастические равновесия системы (19) для $\gamma = 0.7$, $\varepsilon = 0.005$ и соответствующие доверительные эллипсы: (a) $b = 1.75$, (b) $b = 3$, (c) $b = 5$.

где x – плотность популяции жертвы, y – плотность популяции хищников.

В параграфе 2.1 исследуются положения равновесия модели (18). Единственное невырожденное равновесие этой системы отвечает сосуществованию хищников и жертв.

В пункте 2.1.1 приводится бифуркационная диаграмма системы вблизи невырожденного равновесия. Описываются представленные на диаграмме зоны и границы, их разделяющие, демонстрируются возможные типы фазовых портретов, возникающих в системе. При $b - 1 > \gamma > \frac{b - 1}{b + 1}$ равновесие устойчиво. При переходе через границу $\gamma = \frac{b - 1}{b + 1}$, изображающую точки бифуркации Андронова-Хопфа, равновесие теряет устойчивость, и в системе рождается устойчивый предельный цикл.

Параграф 2.2 посвящен исследованию характеристик детерминированной устойчивости и стохастической чувствительности равновесия в той области параметров, где оно устойчиво.

В пункте 2.2.1 рассматривается детерминированное равновесие и исследуется его чувствительность к возмущению начальных данных при помощи характеристического показателя.

В пункте 2.2.2 приводится стохастически возмущенная система, отражающая воздействие на модель (18) аддитивных шумов:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - a \frac{x}{1+x} y - \gamma x^2 + \varepsilon \dot{w}_1, \\ \dot{y} = b \frac{x}{1+x} y - y + \varepsilon \dot{w}_2, \end{cases} \quad (19)$$

где ε – интенсивность шумов, w_1 и w_2 – стандартные независимые винеровские процессы.

На рис. 3 демонстрируются облака рассеивания случайных состояний системы (19) и соответствующие им доверительные эллипсы рассеивания.

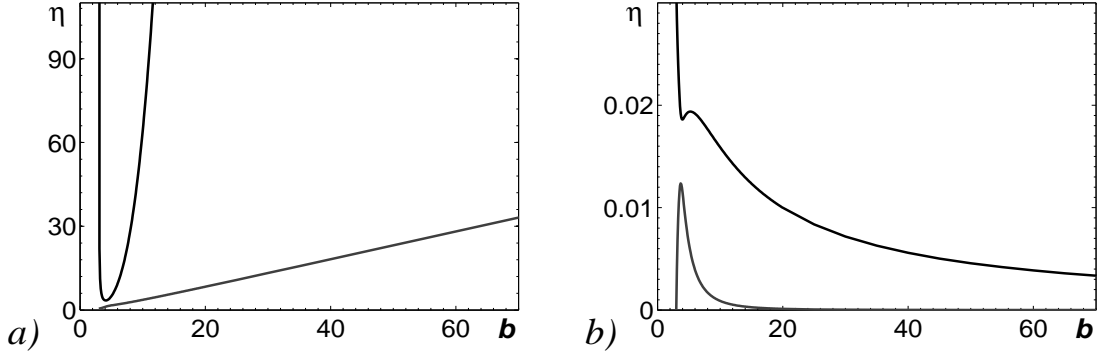


Рис. 4: Стохастическая чувствительность равновесия для аддитивных (a) и параметрических (b) шумов при $\gamma = 2$.

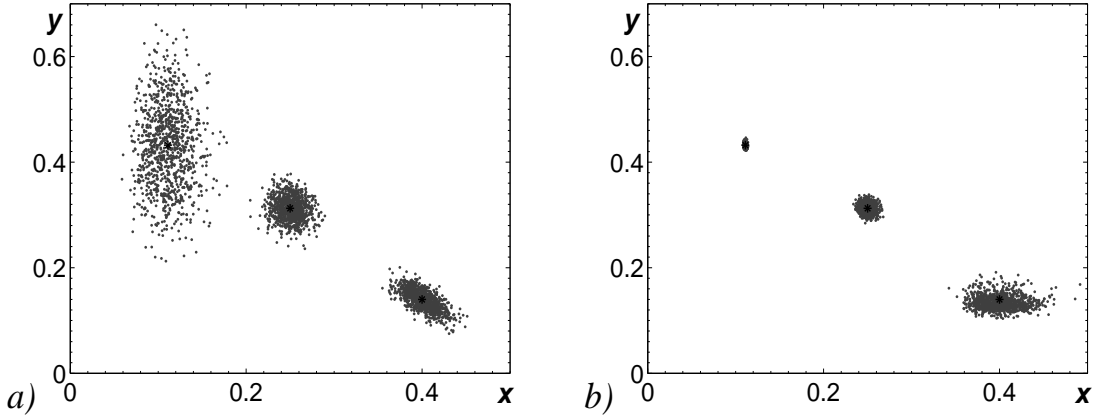


Рис. 5: Стохастические равновесия для (a) аддитивных ($\varepsilon = 0.01$) и (b) параметрических ($\varepsilon = 1$) шумов при $\gamma = 2$ и $b = 3.5$ (правое облако), $b = 5$ (среднее облако), $b = 10$ (левое облако).

Установлено, что в области, где равновесие устойчиво, показатель чувствительности m имеет абсолютный минимум при $b = 4.05$, $\gamma = 1.945$, равный $m_{min} = 3.4207$. При этих значениях параметров равновесие является наименее чувствительным к аддитивным стохастическим шумам.

В пункте 2.2.3 изучается воздействие шумов на параметры b и γ . При этом система (18) принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x} = x - a \frac{x}{1+x} y - (\gamma + \varepsilon \dot{w}_3) x^2, \\ \dot{y} = (b + \varepsilon \dot{w}_4) \frac{x}{1+x} y - y, \end{cases} \quad (20)$$

где ε – интенсивность параметрических возмущений, w_3 и w_4 – стандартные независимые винеровские процессы.

Приводится сравнение динамики ФСЧ для аддитивного и параметрическо-

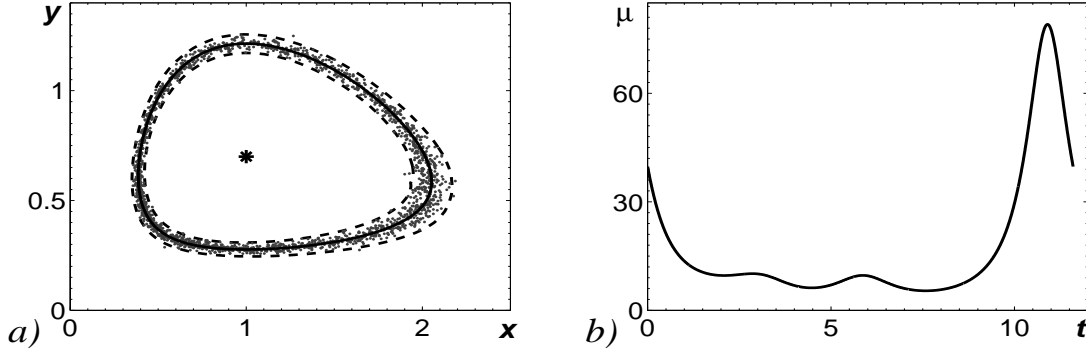


Рис. 6: Доверительное кольцо для стохастического цикла (a) при $b = 2$, $\gamma = 0.3$, $\varepsilon = 0.005$, $\mathcal{P} = 0.97$ и соответствующая функция стохастической чувствительности (b).

го шума по параметру b при нескольких фиксированных значениях γ . Установлено, что по мере роста γ , функции η_1 и η_2 для этих двух типов шумов начинают вести себя кардинально различным образом. Если для аддитивного шума при $\gamma > 1$ обе функции стремятся к бесконечности с увеличением параметра b , то для параметрического шума значения η_1 и η_2 при увеличении b устремляются к нулю (см. рис. 4). Эти различия наглядно прослеживаются на рис. 5 по форме и размеру соответствующих облаков случайных состояний. Кроме того, если в случае аддитивных шумов минимум показателя достигается внутри области устойчивости равновесия, то для параметрических шумов – на бесконечности.

Параграф 2.3 посвящен исследованию устойчивости предельных циклов системы (18) в области $\frac{b-1}{b+1} > \gamma > 0$, где равновесие неустойчиво.

В пункте 2.3.1 исследуется устойчивость предельного цикла в отсутствие шумов при помощи мультипликаторов. Демонстрируется снижение уровня детерминированной устойчивости цикла при приближении параметров к границе $\gamma = \frac{b-1}{b+1}$ – в малой окрестности этой кривой значения показателя r близки к единице. Наиболее устойчивыми с детерминированной точки зрения являются предельные циклы, соответствующие значениям γ , близким к нулю.

В пункте 2.3.2 рассматривается предельный цикл, находящийся под воздействием аддитивных возмущений. С использованием функции стохастической чувствительности, для предельного цикла строится доверительное кольцо (рис. 6).

Исследуется поведение показателя чувствительности $m = \max_{[0;T)} \mu(t)$. Показано, что при приближении параметров к границам области неустойчивости равновесия, значения показателя стремятся к бесконечности. Вблизи

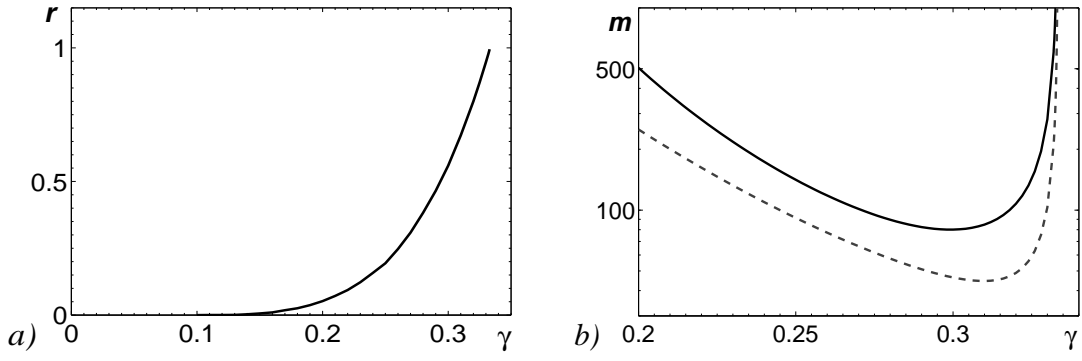


Рис. 7: Показатели устойчивости (a) и чувствительности (b) цикла для аддитивного (сплошная линия) и параметрического (пунктир) шума при $b = 2$.

границы $\gamma = \frac{b-1}{b+1}$ эти результаты соответствуют результатам детерминированного анализа, однако при стремлении γ к нулю, ситуация меняется – наиболее устойчивые с детерминированной точки зрения циклы проявляют максимально высокую стохастическую чувствительность (см. рис. 7).

Для функции m определено минимальное значение – оно достигается при $b = 2.25$, $\gamma = 0.35$ и равно $m_{min} = 77.39$. Стохастический цикл, соответствующий минимальному значению показателя чувствительности, называется *суперциклом*. Такой цикл является наименее чувствительным к воздействию стохастических возмущений.

В пункте 2.3.3 изучается воздействие на предельный цикл параметрических возмущений. Динамика показателя чувствительности по параметру γ при каждом фиксированном b схожа со случаем аддитивных шумов (рис. 7(b), пунктирная линия), однако по мере возрастания параметра b , значение $\min(m(b, \gamma))$ стремится к нулю. Результаты главы 2 опубликованы в [1].

В главе 3 изучается динамика популяций в системе, состоящей из популяций трех разных трофических уровней и взаимодействующих по принципу "продуцент-консумент-хищник":

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - y - \beta z - \gamma x), \\ \dot{y} = -y(1 - x + z), \\ \dot{z} = -z(1 - ay - bx), \end{cases} \quad (21)$$

где x , y и z – численности популяций продуцента, консумента и хищника соответственно.

В параграфе 3.1 исследованы положения равновесия системы (21). Существованию всех трех популяций соответствует единственное невырожденное равновесие.

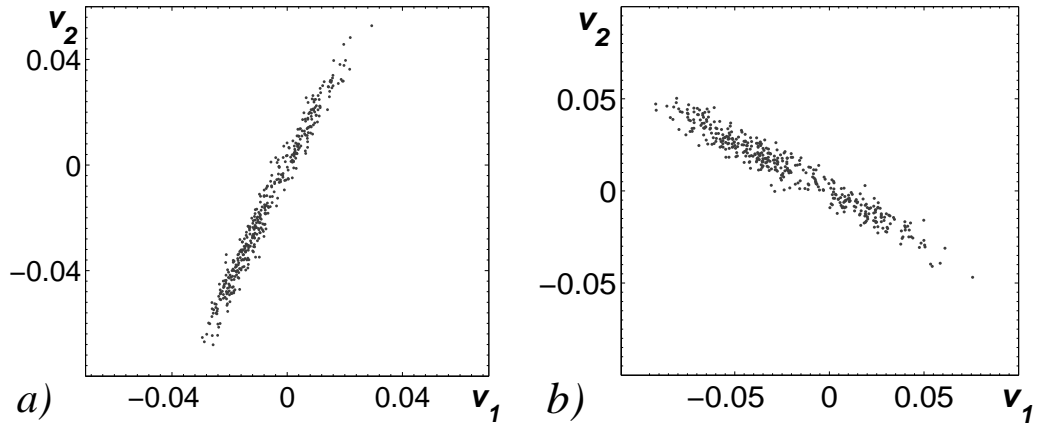


Рис. 8: Сечения пучка случайных траекторий ортогональными циклу плоскостями при $a = 1.056$, $b = 0.092$, $\varepsilon = 0.001$ в моменты (a) $t = 0$, (b) $t = 1.44$

В пункте 3.1.1 приводится бифуркационная диаграмма, дается описание указанных на ней зон и границ. Демонстрируется набор фазовых портретов, соответствующих этим зонам.

Параграф 3.2 посвящен анализу предельных циклов модели. Исследовано изменение формы предельного цикла по мере вариации параметров. Выявлено, что при увеличении параметра a в определенных фазах цикла даже малые шумы могут привести к вымиранию популяции консумента.

В пункте 3.2.1 исследуется детерминированная устойчивость цикла. Показано, что наименьшие значения показателя устойчивости r достигаются на небольшом отдалении параметров от границы потери устойчивости равновесия. При последующем отдалении параметров от этой границы и при непосредственном приближении к ней, показатель r значительно возрастает, свидетельствуя об снижении уровня устойчивости соответствующих циклов.

В пункте 3.2.2 рассматривается стохастически возмущенная система

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - y - \beta z - \gamma x) + \varepsilon \dot{w}_1, \\ \dot{y} = -y(1 - x + z) + \varepsilon \dot{w}_2, \\ \dot{z} = -z(1 - ay - bx) + \varepsilon \dot{w}_3, \end{cases} \quad (22)$$

где ε – интенсивность шумов, w_1 , w_2 и w_3 – стандартные независимые винеровские процессы.

Демонстрируется, что сечения стохастического цикла в различные моменты времени (рис. 8) могут иметь различную форму и размер. Строится ФСЧ предельного цикла, исследуется показатель чувствительности m . Установлено, что динамика показателя m соответствует результатам детерминированного анализа – циклы, обладающие высокой стохастической

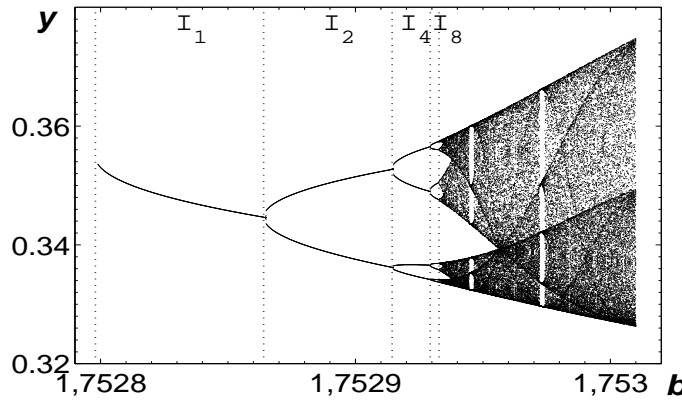


Рис. 9: Бифуркационная диаграмма интервала I .

чувствительностью, имеют и высокие значения показателя детерминированной устойчивости r . Результаты главы 3 опубликованы в [3].

В главе 4 исследуется трехмерная модель взаимодействия популяций двух трофических уровней – хищника и двух видов жертв. Она задается системой

$$\begin{cases} \dot{x} = x(2.4 - x - 6y - 4z), \\ \dot{y} = y(b - x - y - 10z), \\ \dot{z} = -z(1 - 0.25x - 4y + z), \end{cases} \quad (23)$$

где x , y и z – численности двух популяций жертв и хищника соответственно.

В параграфе 4.1 Исследуются возможные режимы сосуществования популяций и условия, отвечающие найденным равновесиям и циклам.

В пункте 4.1.1 приводится бифуркационная диаграмма системы для той области параметров, где невырожденное равновесие неустойчиво. Диаграмма наглядно демонстрирует изменение кратности предельных циклов, возникновение странных аттракторов и формирование нескольких семейств аттракторов. Подробно рассматривается интервал I (рис. 9), на котором наблюдается одна из цепочек бифуркаций удвоения периода, приводящих к хаосу. Внутри интервала I выделены несколько интервалов I_k структурной устойчивости, на которых предельный цикл сохраняет свою кратность.

Параграф 4.2 посвящен исследованию характеристик детерминированной устойчивости и стохастической чувствительности предельных циклов в цепочке бифуркаций удвоения периода.

В пункте 4.2.1 рассматривается зависимость мультипликаторов от параметра b . Установлено, что на всех интервалах структурной устойчивости характер изменения мультипликаторов качественно одинаков, что позволяет

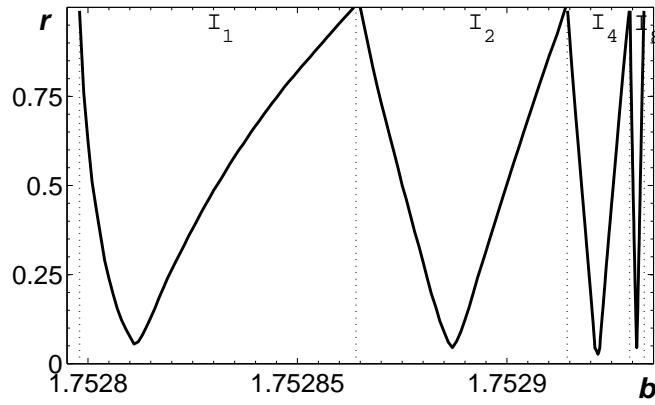


Рис. 10: Показатель детерминированной устойчивости на интервалах $I_1 - I_8$

использовать значения мультипликаторов как критерий, определяющий приближение параметра к границе интервала: при приближении к точке бифуркации, старший мультипликатор становится близким к нулю, значение младшего стремится к -1; при переходе через точку бифуркации, в момент удвоения периода цикла, старший мультипликатор принимает значение, близкое к 1, а значение младшего стремится к нулю.

Здесь также исследовано поведение показателя детерминированной устойчивости $r(b)$ (рис. 10). Определены значения локальных минимумов показателя на каждом из рассматриваемых интервалов структурной устойчивости и значения параметра b , при которых эти минимумы достигаются. Соответствующие этим значениям параметра предельные циклы называются *детерминированными суперциклами*.

Пункт 4.2.2 посвящен анализу влияния на предельные циклы системы (23) аддитивных шумов. Для этого рассматривается следующая стохастическая система:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(2.4 - x - 6y - 4z) + \varepsilon \dot{w}_1, \\ \dot{y} = y(b - x - y - 10z) + \varepsilon \dot{w}_2, \\ \dot{z} = -z(1 - 0.25x - 4y + z) + \varepsilon \dot{w}_3, \end{cases} \quad (24)$$

где ε – интенсивность возмущения, w_1 , w_2 и w_3 – стандартные независимые винеровские процессы.

Демонстрируется различная степень размытия бифуркационной диаграммы интервала I в зависимости от интенсивности возмущений. Приводятся соответствующие детерминированным циклам стохастические аттракторы и функции их стохастической чувствительности.

Исследуется динамика показателя стохастической чувствительности $m(b)$ на интервалах I_1 , I_2 , I_4 и I_8 (рис. 11, сплошная линия). Показано, что значе-

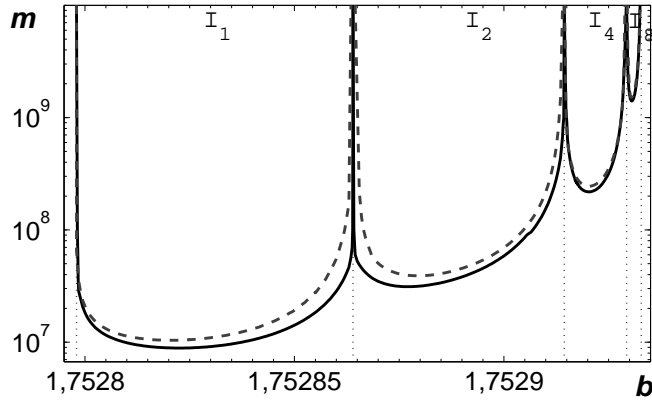


Рис. 11: Показатель стохастической чувствительности для аддитивного (сплошная линия) и параметрического (пунктир) шума на интервалах $I_1 - I_8$

ния m устремляются в бесконечность при приближении параметра к границам интервалов структурной устойчивости. Это означает, что вблизи точек бифуркации система становится максимально чувствительной к возмущениям. Внутри каждого интервала для показателя найден локальный минимум.

В пункте 4.2.3 изучается система, отражающая воздействие на модель (23) параметрических возмущений:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(2.4 - x - 6y - 4z), \\ \dot{y} = y((b + \varepsilon w_4) - x - y - 10z), \\ \dot{z} = -z(1 - 0.25x - 4y + z), \end{cases} \quad (25)$$

где w_4 - стандартный винеровский процесс.

Показано, что чувствительность циклов к разным типам шумов качественно не отличается – наибольшую или наименьшую чувствительность к шумам проявляют одни и те же участки цикла, и относительный перепад дисперсии между ними зависит только от свойств самой системы. Поведение показателя стохастической чувствительности также качественно не изменяется, но вблизи точек бифуркаций рост показателя становится более заметным (рис. 11, пунктирная линия). Определено, что суперциклы для параметрических шумов совпадают с суперциклами для аддитивных шумов.

Для аддитивных и параметрических шумов вычислены коэффициенты роста чувствительности суперциклов. Установлено, что с ростом кратности суперцикла, значения коэффициентов роста чувствительности стабилизируются к значению, примерно равному 6.5 для обоих типов шумов. Результаты главы 4 опубликованы в [2].

В заключении приводится перечень основных результатов диссертации, выносимых на защиту.

В приложении содержится описание разработанного программного комплекса и использованных в нем численных методов.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ

Статьи, опубликованные в рецензируемых журналах, определенных ВАК:

1. Башкирцева И.А., Карпенко Л.В., Ряшко Л.Б. Анализ аттракторов стохастически возмущенной модели "хищник-жертва" // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика, Саратов, 2009.- Т. 17, №2.- С. 37-53.
2. Башкирцева И.А., Карпенко Л.В., Ряшко Л.Б. Стохастическая чувствительность предельных циклов модели "хищник-две жертвы" // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика, Саратов, 2011.- Т. 18, №6.- С. 42-64.
3. Карпенко Л.В. Моделирование и анализ стохастических циклов системы "продуцент-консумент-хищник" // Системы управления и информационные технологии, Воронеж, Научная книга, 2011.- №3.1(45).- С. 155-158.

Прочие публикации:

4. Башкирцева И.А., Карпенко Л.В. Устойчивость модели популяционной динамики // Проблемы теоретической и прикладной математики: Труды 38-й региональной молодежной конференции. Екатеринбург: УрО РАН, 2007.- С. 111-115.
5. Башкирцева И.А., Карпенко Л.В. Стохастическая чувствительность модели хищник-жертва к аддитивным и параметрическим помехам // Проблемы теоретической и прикладной математики: Труды 39-й Всероссийской молодежной конференции. Екатеринбург: УрО РАН, 2008.- С. 92-98.
6. Карпенко Л.В., Ряшко Л.Б. Анализ стохастических колебаний в модели продуцент-консумент-хищник // Проблемы теоретической и прикладной математики: Труды 40-й Всероссийской молодежной конференции. Екатеринбург: УрО РАН, 2009.- С. 145-149.
7. Карпенко Л.В., Ряшко Л.Б. Модель "хищник-две жертвы" в зоне бифуркаций удвоения периода предельных циклов // Проблемы теоретической и прикладной математики: тезисы 41-й Всероссийской молодежной школы-конференции. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2010.- С. 268-274.

8. *Карпенко Л.В., Ряшко Л.Б.* Стохастическая чувствительность модели "хищник-две жертвы" к аддитивным и параметрическим шумам // Современные проблемы математики: Тезисы 42-й Всероссийской молодежной школы-конференции. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2011.- С. 319-321.
9. *Карпенко Л.В., Ряшко Л.Б.* Модель "хищник-две жертвы" в зоне бифуркаций удвоения периода предельных циклов // Материалы межвузовской конференции по проблемам информатики СПИСОК-2009. Екатеринбург, 2009.
10. *Карпенко Л.В., Ряшко Л.Б.* Стохастическая чувствительность предельных циклов модели "хищник-две жертвы" // Материалы конференции, посвященной 50-летию кафедры вычислительной математики и математико-механического факультета УрГУ. Екатеринбург, 2010.- С. 39-43.
11. *Карпенко Л.В., Ряшко Л.Б.* Конструирование функции стохастической чувствительности на основе метода сингулярного разложения // Современные проблемы математики: Тезисы Международной (43-й Всероссийской) молодежной школы-конференции. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2012.- С. 366-368.